とやま科学オリンピック 2017

数　学

（高校部門）

2017 年 8 月 9 日（水）

時間：　9 時 45 分～12 時 15 分（150 分）

注意事項

１．指示があるまで、問題冊子を開かないこと。
２．問題は$\boxed{1}$から$\boxed{5}$まで１１ページにわたって印刷してあります。
３．解答はすべて解答用紙に記入し、解答用紙だけを提出すること。
４．解答用紙は５枚あります。
５．参加番号を解答用紙の決められた欄に記入すること。
６．途中で気分が悪くなった場合や、トイレに行きたくなった場合は、すぐに申し出ること。

みなさんの健闘を期待しています。

富山県　　富山県教育委員会

このページに問題はありません

1　2016年に開催されたブラジルリオデジャネイロオリンピックでは富山県出身の田知本遥選手が柔道，登坂絵莉選手がレスリングで金メダルを獲得するなど，富山県出身選手の素晴らしい活躍が見られました。オリンピックを通し，身近な事柄についての考察をしたいと思います。

オリンピックの柔道では以下の方法でトーナメントが行われています。

- 各階級の選手達はＡとＢの2ブロックに分けられる。
- シード選手は1回戦のみ免除される。
- 以下の方法で敗者復活戦を始め，3位を2名決めることとする。

○ 敗者復活戦に出場できる選手は準々決勝で負けた4名と，準決勝で負けた2名である。
○ まず同じブロックの準々決勝の敗者同士で試合を行う。
○ その試合で勝った選手と異なるブロックにおいて準決勝で負けた選手が3位決定戦を行う。

田知本選手が出場した女子70 kg級は24名の選手が出場しました。

（1）全行程が終了するまで何試合行われるか求めなさい。

（2）上の条件で2017名がトーナメントに出場した場合，全行程が終了するまで何試合行われるか求めなさい。

同時に2試合行える会場で，以下の要領でタイムテーブルを組むとする。

- 1試合の時間は8分と考え，前の試合の終了から次の試合の開始まで5分かかるものとする。
- 同じ選手が連続して試合は行わないこととする。
- 準決勝，3位決定戦はそろえて行うこととする。
- 誰も試合を行わないときは，10分間隔を開けることで連続試合と見なさないこととする。
- 決勝戦は最後に行うこととする。

（3）24名のトーナメントでは全行程が終了するまで最短で何分かかるか求めなさい。

今回のオリンピックは富山県出身選手の素晴らしい活躍があったとともに，陸上でも快挙がありました。男子400 mリレーで37秒60のアジア新記録をマークし，ジャマイカに次ぐ2位で銀メダルを獲得したのです。

ここで，陸上について考えてみたいと思います。

陸上の400 mトラックは直線が80m×2，カーブがそれぞれ半円となっており，1レーンあたりの幅は1.22 mであり，内側から第1レーン，第2レーン，…と決められています。400 mリレーでは，他のチームと接触しないためにスタートからゴールまでレーンを変更することなく走り続けます。このとき，次の問いに答えよ。ただし円周率はπとする。

（4）第1レーンの内側の半円の半径を求めなさい。

（5）日本は第5レーンを走ったが，第1レーンを走ったチームより何メートル前からスタートしたか求めなさい。

2

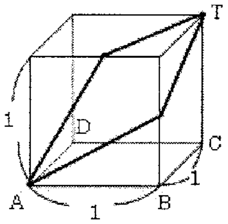
富山県は日本海側気候に属し，冬季は降雪量が多く厳しい寒さが続きます。里山の雪が解け，春らしく暖かい日が見られるようになるのは3月中旬で，その頃になると成虫で冬越しをしていた虫たちが姿を現し始めます。テントウムシもそんな昆虫の一種です。日本各地で一番多く見られるのはナミテントウですが，それ以外にも種類は多く富山県では 29 種も知られています。テントウムシは上へ登る習性があり，その足の構造から壁やガラス窓も自由に登ることができます。立体の表面を移動するテントウムシについて，次の問題を考えましょう。

（1）文中の $\boxed{\text{ア}}$ $\boxed{\text{イ}}$ に適する数を答えなさい。

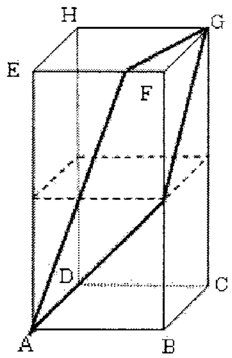
【図１】のような１辺の長さが１の立方体の隅の点Aに，１匹のテントウムシがいます。テントウムシが立方体の上面とすべての側面を移動することができるならば，移動できる面上で点Aから最も遠い点は点Tです。点Aから点Tまで最短距離で行く方法は何通りかありますが，どの経路を通ってもその距離は $\boxed{\text{ア}}$ です。

次に【図１】と同じ立方体を２つ重ね，【図２】のような直方体を作りました。この直方体の点Aから最も遠い点は，立方体と同様に考えると点Gと予測できます。点Aから点Gまで移動する経路は何通りか考えられますが，その中で最も短い長さは $\boxed{\text{イ}}$ です。

【図１】



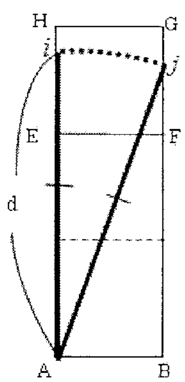
【図２】



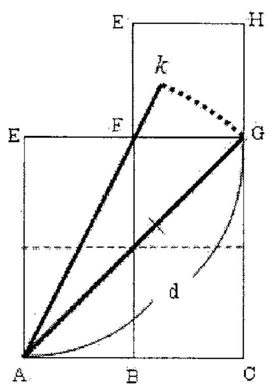
$\boxed{\text{イ}}$ で求めた長さをdとします。

点Aから【図２】の直方体に長さdのひもを４通りの方法でかけます。ひもが届く範囲を展開図を用いて示すと次の【図３】～【図６】のようになります。

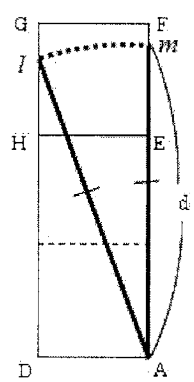
【図３】



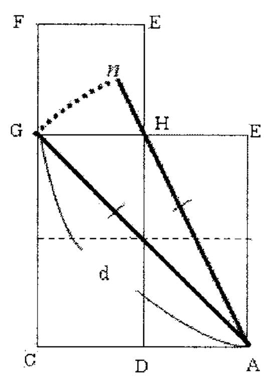
【図４】



【図５】

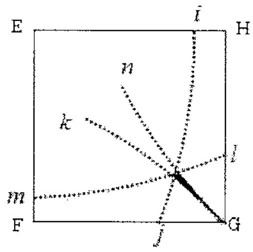


【図６】



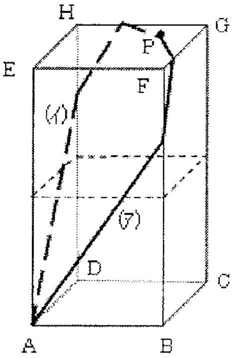
【図３】～【図６】の面$EFGH$を重ねると【図７】のようになります。図の黒く塗った部分は，ひもが届かない部分です。これは点Gより遠い場所であり，この中に点Aから最も遠い点があると考えられます。それは具体的にどのような点であるか次の方法で考えます。

【図７】

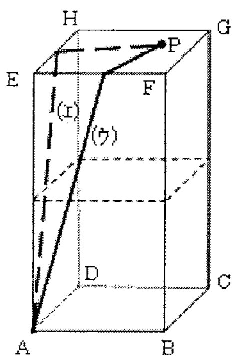


点Aから最も遠い点を点Pとします。点Aから点Pまで直方体の表面を通ったときの最短経路は【図８】【図９】に示す４ 通りが考えられ，これらの経路の長さはすべて等しくなります。

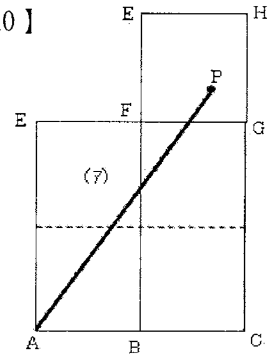
【図８】



【図９】



【図10】

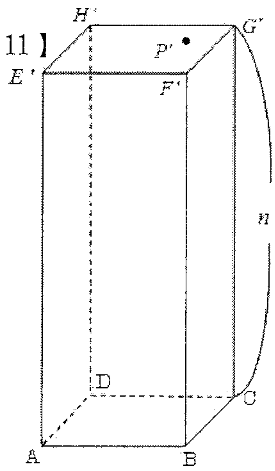


（２）【図10】は経路(ア)を展開図をかいて示したものです。経路(イ)(ウ)(エ)についても展開図をかいて示しなさい。

（３）直方体の面$EFGH$において，点Pから辺GF, GHに引いた垂線をそれぞれPQ, PRとします。PQの長さを x，PRの長さをyとして，点Aから点Pまでの最短の長さを （２）の(ア)～(エ)について4 通りの式で表しなさい。

（４）（３）で表したAPの長さがすべて等しくなるような x, yの値を求めなさい。また，そのときのAPの長さを求めなさい。

【図11】



（５）【図１】と同じ立方体をn個重ね【図11】のような直方体を作りました。点Aから立体の表面を移動したときの最も遠い点をP'，点P'から辺$G'F', G'H'$に引いた垂線$P'Q', P'R'$の長さをそれぞれx', y'として，x', y'の値をnを用いて表しなさい。

（６）立方体をいくつも重ね立体が高くなるほど，点Aから立体の表面を移動したときの最も遠い点は，上面のどのような位置に近づきますか。また，その理由も述べなさい。

3　様々な場面で起こる事柄は，場合に分け，順序よく数えることで，全体の様子が見えてきます。数学では，これを「場合の数」と言います。このときに大切なのは，「漏れなく」「重複なく」数えることです。その際，表や図を使うことで整理したり，規則性を見出すことができます。

（1）大中小の３個のさいころを投げるとき，目の和が５になる場合は何通りかを考えます。

① 和が５になる３つの数の組合せをすべて求めなさい。

② その時，さいころの大中小に注意して全部で何通りか求めなさい。

規則性を利用して，数える方法を下に示しました。

規則性から，いくつかのものの中からその一部を取り出して1列に並べるとき，
その並びの１つ１つを順列（じゅんれつ）といいます。
異なる n 個のものから異なる r 個を取り出して並べる順列の総数を $_nP_r$ で表します。

$$_nP_r = n\times(n-1)\times(n-2)\times\ \cdot\cdot\cdot\ \times(n-r+1)$$

１から n までのすべての自然数の積を階乗（かいじょう）といい $n!$ で表します。

$$_nP_n = n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\ \cdot\cdot\cdot\ \times3\times2\times1$$

ただし $_nP_0=1$，$0!=1$　と定めます。

n 個の異なるものから r 個を取り出してつくった組合せを，n 個のものから r 個取った組合せといい，その総数を $_nC_r$ で表します。

$$_nC_r = \frac{_nP_r}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\cdot\cdot(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdot\cdot\cdot3\cdot2\cdot1}$$

ただし $_nC_0=1$　と定めます。

例えば,

①６人の候補選手の中からリレーの第１走者から第４走者までを決めるとき，４人の走者の決め方は何通りか。

（考え方）　６人から４人を選んで１列に並べる順列なので　　（解答）　$_6P_4=6\times5\times4\times3=360$ 通り

②６人の生徒全員を１列に並べるとき，その並べ方の総数は何通りか。

（解答）　$_6P_6=6!=6\times5\times4\times3\times2\times1=720$ 通り

③６人の生徒から４人を選ぶとき，選び方は何通りか。　（解答）　$_6C_4=\frac{_6P_4}{4!}=\frac{6\times5\times4\times3}{4\times3\times2\times1}=15$ 通り

（2）７人から３人の学級委員を選ぶとき，選び方は何通りか求めなさい。

富山湾では、年間何回か蜃気楼（しんきろう）を見ることができます。また，富山県は地震の少ない県であると言われます。このようにある事柄が期待されることを何とか数字に表したいと思います。ある事柄が起こりやすい程度をあらわしたものを確率といいます。

$$確率 = \frac{起こる場合の数}{起こり得るすべての場合の数}$$ で表します。

1から10までの数が1つずつ書かれた10枚のカードが入った袋があります。この袋から4枚のカードを同時に取り出します。

取り出した4枚のカードに書かれた数を小さい方から順に X_1，X_2，X_3，X_4 とします。

例えば，引いた4枚のカードが2，5，7，8 とすると

$(X_1, X_2, X_3, X_4) = (2, 5, 7, 8)$ となります。

（3）$X_3 = 3$ のとき，(X_1, X_2, X_4) の組をすべて書きなさい。

（4）10枚のカードから4枚のカードを同時に取り出す取り出し方は何通りか求めなさい。

また，$X_3 = 3$ となる確率を求めなさい。

（5）$X_4 - X_1 = 7$ となる (X_1, X_4) の組をすべて書きなさい。

また，$X_4 - X_1 = 7$ となるときの X_2，X_3 を考え，そのときの確率を求めなさい。

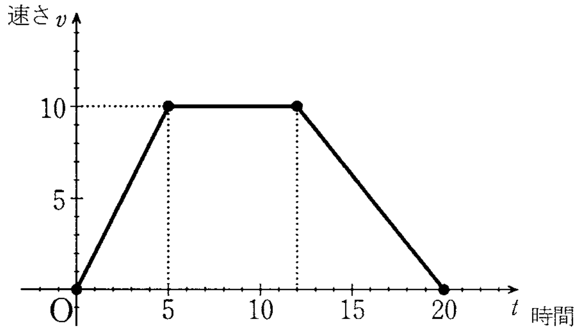
（6）X_1 が X_3 の約数となり，かつ X_3 が X_4 の約数となるときの確率を求めなさい。

4　富山県は，鉄道王国と言われています。2015 年 3 月に金沢まで開業した北陸新幹線，JR，あいの風とやま鉄道，富山地方鉄道，富山ライトレール，万葉線，黒部峡谷鉄道など，多くの会社にたくさんの種類の車両が走っています。北陸新幹線の最高速度は，時速 260 kmで，富山と東京の間を最短 2 時間 8 分で結びます。ここでは速さと時間と移動距離の関係をグラフを使って考えることにします。

（1）等速で移動する乗り物としてスキー場のリフトを考えます。
リフトが毎秒 1.2 m で移動し，山頂まで120 秒 かかるとします。
移動距離を求めなさい。また 時間 t を横軸，速さ v を縦軸にとり，$v-t$ グラフを書きなさい。

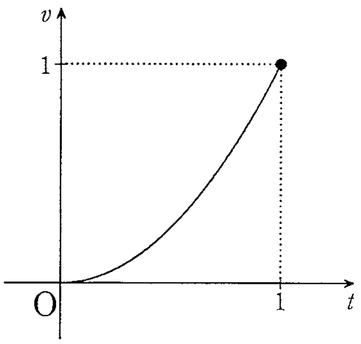
$v-t$ グラフにおいて移動距離は面積で表されます。スキー場のリフトは一定の速さで移動しますが，新幹線や車などは，加速減速を繰り返し，速さを変化させて移動します。速さの変化を $v-t$ グラフに表すと等速の場合と同様に移動距離は面積で表されます。

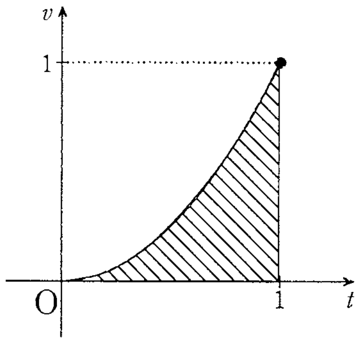
（2）速さの変化が次の $v-t$ グラフで表されるとき $t=0$ から $t=20$ までの移動距離を求めなさい。
ただし，時間 t の単位は【秒 (s)】，速さ v の単位は【メートル毎秒 (m/s)】とする。



$v-t$ グラフにおいて速さの変化が（1），（2）のように直線で表されると面積を容易に求めることができます。しかし曲線の場合は簡単に求めることができません。このような場合，区分求積法を使って面積を求めることができます。以下ではその方法を考えてみましょう。

次の $v-t$ グラフは　$v=t^2$　（$0 \leqq t \leqq 1$）　を示したものです。$f(t)=t^2$ とします。



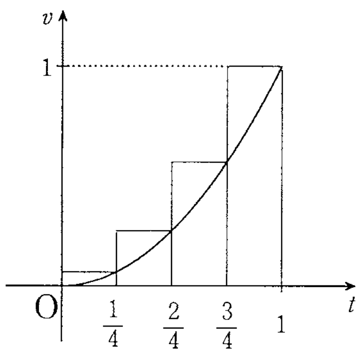


右上図の斜線部分の面積を考えてみましょう。

下図のように t 軸の $0 \leqq t \leqq 1$ を４等分し，４つの長方形の面積の和を求めます。

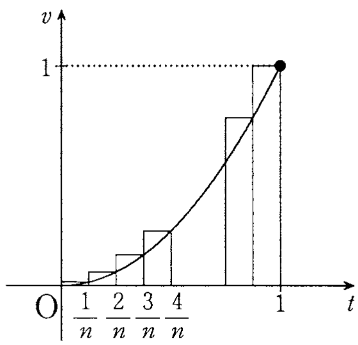
４つの長方形は底辺の長さはすべて $\dfrac{1}{4}$ です。

高さは左の長方形から　$f\left(\dfrac{1}{4}\right)$，$f\left(\dfrac{2}{4}\right)$，$f\left(\dfrac{3}{4}\right)$，$f\left(\dfrac{4}{4}\right)$ です。



（3）上図の４つの長方形の面積の和を求めなさい。

次に t 軸 の $0 \leqq t \leqq 1$ を n 等分し，n 個の長方形の面積の和を求めてみましょう。



n 個の長方形の面積の和を求める際に

自然数の和　　　　$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n$

自然数の平方の和　$T_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2$

が必要になるので，ここで求めておきます。

（4）次の例1の S_4，例2の T_4 の考え方を踏まえて，自然数の和 S_n，自然数の平方の和 T_n を求めなさい。

例1　$S_4 = 1 + 2 + 3 + 4$　……①

　　　$S_4 = 4 + 3 + 2 + 1$　……②

①＋②より

$$2S_4 = 5 + 5 + 5 + 5$$

$$S_4 = \frac{1}{2} \times 5 \times 4$$

$$S_4 = 10$$

例2　$T_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$

　　　$= 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 4$

　　　$= 1 + (2 + 2) + (3 + 3 + 3) + (4 + 4 + 4 + 4)$

表し方を少し変えて

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \quad 2 \\ 3 \quad 3 \quad 3 \\ 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \\ \mathrm{A} \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ 3 \quad 4 \\ 2 \quad 3 \quad 4 \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ \mathrm{B} \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ 4 \quad 3 \\ 4 \quad 3 \quad 2 \\ 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \\ \mathrm{C} \end{array} = \begin{array}{c} 9 \\ 9 \quad 9 \\ 9 \quad 9 \quad 9 \\ 9 \quad 9 \quad 9 \quad 9 \\ 3T_4 \end{array}$$

A，B，Cを3つ重ねてたすと

$(1 + 4 + 4) = (2 + 3 + 4) = (3 + 3 + 3) = 9$　が

全部で　$(1 + 2 + 3 + 4)$ 個できる。

よって　$3T_4 = (1 + 4 + 4)(1 + 2 + 3 + 4)$

$$T_4 = \frac{1}{3} \times 9 \times 10$$

$$T_4 = 30$$

（5）（3），（4）を踏まえて，n 個の長方形の面積の和を求めなさい。

このページに問題はありません

$\boxed{5}$ 富山県では，立山山麓で約２万株のひまわりが咲いたり，環境教育の一環として，射水市に「ひまわり迷路」が作られたりと，様々な場所でひまわりを楽しむことができます。ひまわりは，花の中の種の並びに $1:\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ という黄金比が存在しており，「黄金花」と言われています。$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ は，分数の分母にさらに分数が含まれている形を用いて表すと，$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$ という美しい形になります。

このように，分数の分母にさらに分数が含まれている以下のような形のものを「連分数」といいます。

$$k_0+\cfrac{1}{k_1+\cfrac{1}{k_2+\cfrac{1}{k_3+\cdots}}} \qquad (k_0\text{は整数，}k_1, k_2, k_3, \cdots\text{は自然数})$$

分数式を下に続けて書いていくと場所をとってしまうので，[　] を用いて

$$k_0+\cfrac{1}{k_1+\cfrac{1}{k_2+\cfrac{1}{k_3}}}=[k_0, k_1, k_2, k_3]$$ のように表記します。

例えば，$\dfrac{43}{30}$ を連分数で表すと，以下のようになります。

$$\frac{43}{30}=1+\frac{13}{30}=1+\cfrac{1}{\cfrac{30}{13}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{4}{13}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{13}{4}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}=[1, 2, 3, 4]$$

このように，有限個しか続かない連分数を「有限連分数」といいます。連分数は，数の正体を見破る技術として知られています。

（1） ① $\dfrac{157}{68}$，② $\dfrac{123}{100}$ を連分数で表しなさい。

（2） $[1, 1, 2, 3, 4]$ を分数 $\dfrac{a}{b}$（a，b は自然数）の形に直しなさい。

次に，無理数$\sqrt{2}$を連分数で表すことを考えます。$\sqrt{2}$の整数部分は1，小数部分は$\sqrt{2}-1$です。

$\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1$　であることを用いて，以下同様に計算を続けていくと，

$$\sqrt{2}=1+(\sqrt{2}-1)=1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{2}-1}}=1+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}=1+\cfrac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}$$

$$=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}}}$$

$$=\cdot\cdot\cdot=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}}}}}}=[1,2,2,2,2,2,2,\cdot\cdot\cdot]$$

このように，無限に続く連分数を「無限連分数」といいます。

（３）無限連分数$[1,2,2,2,2,2,2,\cdot\cdot\cdot]$を途中で止めて，有限連分数$[1,2,2,2,2,2,2]$とし，小数第５位を四捨五入して，$\sqrt{2}$の近似値を小数第４位まで求めなさい。

（４）$\sqrt{3}$を連分数で表しなさい。ただし，$[a,b,c,d,e,f,g,\cdot\cdot\cdot]$の形で答えなさい。

連分数は，数の正体を見破るだけでなく，与えられた数に近い分数を見つける働きもします。連分数で表された数αがあったときに，その分数を途中で打ち切って作った分数をαの「連分数近似」といいます。また，小数を四捨五入して得られた数を「小数近似」といいます。例えば，αの小数近似が8.3の場合，$8.25\leqq\alpha<8.35$となります。

いま，αという値の近似値が$1.23=\dfrac{123}{100}$となったとします。このとき，

（５）小数近似の誤差（αと1.23の差）はいくつ以下になるか，分数で答えなさい。

（６）連分数近似の誤差（αと$\dfrac{123}{100}$の差）がどれくらいになるかを求め，小数近似と連分数近似のどちらの方が精度が高いかを答えなさい。必要があれば，（１）②の連分数の結果を用いなさい。

（７）（６）で答えた近似の精度が高くなる理由を説明しなさい。